数理解析研究所講究録 1200 巻 2001 年 103-115

結び目と素数, 3次元多様体と代数体

金沢大理　森下 昌紀 (Masanori Morishita)
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Kanazawa University

以下、結び目と素数、3次元多様体と代数体の類似について考えてきたことを、私なりの動機、考え方を中心に、私自身の見方を論じたいと思う。

序. 1変数関数体と代数体の類似

これは代数幾何と数論の間に成り立つ類似の原理である。その起こりは、Kronecker, Dedekind, Hensel あたりであろう。Hermite-Minkowski の数の幾何は Riemann-Roch の理論であり、Hilbert の類体論は初め Abel-Jacobi の理論をモデルとして考えられた。これらは、素数は点、イデアルは因子、数は (素数たちの上の) 関数と見る「関数体と代数体の類似」という見方によっている。

$$
\begin{array}{ccc}
F[X] & \longleftrightarrow & \mathbf{Z} \\
\cap & & \cap \\
F(X) & \longleftrightarrow & \mathbf{Q} \\
F(X,Y)\,(f(X,Y)=0) & & k=\mathbf{Q}(\theta)\,(f(\theta)=0) \supset \mathcal{O}_k(k\text{の整数環}) \\
 & & \\
\text{直線}/F\ (\text{代数曲線}/F) & \longleftrightarrow & \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})\ (\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)) \\
\Cup & & \Cup \\
P=\mathrm{point} & \longleftrightarrow & \wp=\text{素イデアル} \\
 & & \\
\text{因子} & \longleftrightarrow & \text{イデアル} \\
 & & \\
\text{関数} & \longleftrightarrow & \text{数}
\end{array}
$$

数の幾何から Arakelov 幾何への高次元化、類体論の非 abel 化や代数幾何的な高次元化、また岩澤理論など類体論を深める方向への発展などにおいてもこの類似の幾何的な見方はとても実り多かった。

以下に述べる見方では、素数は結び目、イデアルは絡み目、数は曲面に対応すると見る。 数が曲面だとは奇異に聞こえるかもしれないが、数からイ

デアルを生成する操作を曲面からその境界をとる操作と比べれば、イデアル類群は１次元のホモロジー群と見れるという、よりトポロジカルな見方である。($\wp$-進体を曲面に対応するものと見る見方もできる c.f. セクション２)。

こういうことを私が考えてきた動機の一つは、関数体と代数体の類似という picture では説明できない代数体の Galois 群に関するある古典的な問題にある。例えば、有限次代数体 k の最大不分岐 Galois 群 $\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k))$ は、関数体と代数体の類似に基づけば、代数曲線 C の基本群 $\pi_1(C)$ の類似物と見られるが、$\pi_1(\mathcal{O}_k)$ の群論的構造は $\pi_1(C)$ のそれと比較できるような類似性をもたず、有限にも無限にもなり全く不可解にみえる。Fを有限体とすると、$\pi_1(C)$ は、$\mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \simeq \hat{\mathbf{Z}}$ の $\pi_1(\overline{C})$ による拡大で、lを Fの標数と異なる素数とすると、最大 pro-l商$\pi_1(\overline{C})^{(l)}$ はよく知られた曲面群の群表示をもつ。一方、代数体の不分岐 pro-l Galois 群については、そうした統一的な群構造は存在せず、l-類体塔の Galois 群 $\pi_1(\mathcal{O}_k)^{(l)}$ に関する Golod-Šafarevič の理論 ([G-S]) がほとんど唯一の洞察を与えている (解析的な視点から [Ih1] がある)。ここで類似が存在しない理由の一つは、関数体と代数体の類似の見方では、

各素数の個性が無視されている

ことにあるのではないかと考えたい。これは、素数を点と見るという視点が初めから抱えている避けられない所で、２も３も５も皆没個性の点になってしまうのであり、数学的には、関数体では各点の剰余体の標数が皆一致しているのに対し、代数体では各素イデアルの剰余体の標数は皆異なるのである。だから、代数体でも l-拡大を考える時は、逆に lの所に個性を集中させて他の素数の個性を無視できるような形にできれば、関数体の類似が成り立つだろう (よく “l進云々” と lが単なる “文字” のような言い方をするが、この見方である)。それが岩澤理論である。実際、k_∞を kの円分 $\mathbf{Z}_l$-拡大、$\mathcal{O}_\infty$をその整数環とする時、完全列 $1 \to \pi_1(\mathcal{O}_\infty[1/l])^{(l)} \to \pi_1(\mathcal{O}_k[1/l])^{(l)} \to \mathrm{Gal}(k_\infty/k) \simeq \mathbf{Z}_l \to 1$ があり、ここで無限素点を用いて l上の分岐に工夫をすれば (positively ramified 拡大)、$\pi_1(\mathcal{O}_\infty[1/l])^{(l)}$はある kに対しては曲面群と同様の群表示を持つことが知られている (Wingberg, Schmidt [Sc])。それでは、それ以外の分岐条件を持つ代数体の Galois 群に対しては、何らかの幾何的な見方はできないのであろうか？ こうして私が考えたのが、素数を結び目と見、岩澤 picture 以外の分岐条件を持つ Galois 群も 3-manifold group の類似と見れるのではないだろうか、という３次元的な picture である。この見方では、岩澤 picture は、S^1上の Seifert 曲面をファイバーとする曲面束の場合 (lは fibred 結び目の如し) と見れ、岩澤多項式は Alexander 多項式に対応する (この岩澤多項式と Alexander 多項式の類似が Mazur によって指摘されていることを最近知った ([Ma2], 本文最後参照))。この３次元的な見方は、$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$ が３次元

の Poincaré 双対性の類似である Artin-Verdier の双対性をもつ ([Ma1]) というあたりに現代的な芽があるが、この考え方の起こりは関数体と代数体の類似という考え方よりもずっと古く、Gauss の仕事の中に見られるように思われるのである。

1. 絡み数と Legendre 記号

Gauss は若年、平方剰余の相互律を証明し、後に電磁気学の研究を行った。この後者の研究から生まれたものに、絡み目の絡み数の積分表示がある ([G2])。

$K \cup L$ を $\mathbf{R}^3 \subset S^3$内の絡み目、$c, l : [0,1] \to \mathbf{R}^3$ を各々のパラメータ表示としよう。K, L の絡み数 $\mathrm{lk}(K, L)$ は積分

$$\begin{aligned}(1.1) \qquad \mathrm{lk}(K,L) &= -\frac{1}{4\pi}\int_0^1 ds \int_0^1 \frac{((l(t)-c(s)) \times c'(s)) \cdot l'(t)}{||l(t)-c(s)||^3} dt \\ &= \int_0^1 B(l(t)) \cdot l'(t) dt.\end{aligned}$$

で与えられた。ここで、$B(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^1 \frac{(x-c(s))\times c'(s)}{||x-c(s)||^3} ds$ は、Kに電流を流した時の $x \in \mathbf{R}^3$における磁場を表す (ビオ·サバールの法則 [深 1])。絡み数 $\mathrm{lk}(K, L)$ は、Kを境界とする Seifert 曲面 (膜) を Dとすると、カップ積

$$(1.2) \qquad H^1(S^3 - K) \times H_c^2(S^3 - K) \xrightarrow{\cup} H_c^3(S^3 - K) \simeq \mathbf{Z}$$

における $[D] \cup [L]$ で与えられる。

一方、p, q を相異なる奇素数とし、$X = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ とする。Xは etale topology において Artin-Verdier の双対定理という一種の 3 次元の Poincaré 双対性を満たし、$\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbf{F}_p)) = \langle \mathrm{Frobenius} \rangle \simeq \hat{\mathbf{Z}}$ より $\{p\} \subset X$ は結び目と見れる。Frobenius と結び目の longitude が対応していることに注意。$\mathbf{F}_2$-係数の etale cohomology における cup 積

$$H^1(X - \{p\}) \times H_c^2(X - \{p\}) \xrightarrow{\cup} H_c^3(X - \{p\}, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \simeq \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

を考えよう。実際には、無限素点を考慮に入れた少し modify した cohomology を考える必要があるが、省略する。ここで境界写像

$$\partial : H^1(X - \{p\}) \longrightarrow H_p^2(\hat{X}_p) \simeq \mathbf{F}_2$$

が同型なので、p を $H_p^2(\hat{X}_p)$ の生成元 $[p]$ と同一視して、$\partial([D])=[p]$ となる Dを p を張る曲面と見ることにする。同様に、$[q]\in H^2(X-\{p\})$ が $H_q^2(X)$ の生成元の像として定まる。こうして (1.2) の類似 $[D]\cup[q]$ をもって、2つの素数 p, qの絡み数 $\mathrm{lk}_2(p,q)\in \mathbf{F}_2$が定義される。Artin-Verdier の双対定理における計算 (類体論) により、絡み数 $\mathrm{lk}_2(p,q)$ は Legendre 記号$\left(\frac{q}{p}\right)$と実質一致する ([W]):

$$\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\mathrm{lk}_2(p,q)}$$

より一般には、初めに素数 lを与えておいて、考える素数はみな mod lで 1 に合同なものたちにするとよい。絡み数 mod l, $\mathrm{lk}_l(p,q)\in \mathbf{F}_l$も同様に定義され、冪剰余記号で表される。

Legendre 記号は絡み数と異なり、一般には対称性をもたず、そのずれを与えるのが平方剰余の相互律である。Gauss は相互律を証明するために Gauss の和

$$G_y(p)=\sum_{x\in\mathbf{F}_p}(\frac{x}{p})\exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}xy}{p})$$

を導入した。実際、Legendre 記号は Gauss の和を用いて書き表せる：

$$(1.3)\left(\frac{q}{p}\right)=\frac{1}{p}\sum_{y\in\mathbf{F}_p}G_y(p)\exp(-\frac{2\pi\sqrt{-1}yq}{p})=\frac{1}{p}\sum_x\sum_y\left(\frac{x}{p}\right)\exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}(x-q)y}{p}).$$

(1.1) と (1.3)、磁場 $B(x)$ と Gauss の和 $G_y(p)$ は類似していないだろうか？この小野孝氏の指摘が私のもう一つの動機である。素数 p があるとその回りに磁場 $G(p)$ が生じ、別の素数 qが力を受ける。その相互作用が相互律！
Gauss の仕事で他に、整係数２元２次形式の分類論 (Disquisitiones Arithmeticae [G1]) があるが、その中で Gauss は与えられた判別式をもつ２次形式たちの間に「種」というある同値関係を導入した。実は、あとでみるように (セクション 3)、これがまさに素数と判別式の絡み数の考え方なのである。Gauss の中では数論、トポロジーと物理が一体となっていたことがうかがわれる。

さて、(1.1) の右辺の積分は、ゲージ群を U(1) とするゲージ理論における Chern-Simons 汎関数の分配関数

$$(1.4)\qquad \int_{A(\mathbf{R}^3)}\exp(2\pi\sqrt{-1}k\int_{\mathbf{R}^3}a\wedge da)\exp(\sqrt{-1}\int_K a)\exp(\sqrt{-1}\int_L a)\mathcal{D}a$$

の主要項 ($k \to \infty$) と見れる。この積分はGauss積分 $\int_{\mathbf{R}^n} \exp(\sqrt{-1}\sum \lambda_{ij}x_i x_j)dx$ の無限次元類似と見れ ([河])、従って、絡み目積分が Gauss 和の類似であるという上に述べた視点がここに見てとれる。さらにこれを SU(2)-Chern-Simons 汎関数へ非可換化したものが、

$$\int_{\mathcal{A}(\mathbf{R}^3)} \exp(2\pi\sqrt{-1}kCS(a))\psi_K(a)\psi_L(a)\mathcal{D}a \tag{1.5}$$

の $k \to \infty$) における主要項で (ここで、$\psi_K(a)$ は $\exp(\int_K a)$ の非可換化 ([深 2],[河]))、Vassiliev 不変量などの絡み目不変量がこうして得られた。
一体、数論において Gauss の和をこのように一般化する理論はある (あった) だろうか？Gauss の和を Dirichlet の L 関数 $\mathrm{L}(s) = \sum(\frac{n}{p})n^{-s}$ の $s = 1$ における値に現れる項と見ることが (1.4) に相当するのだろうか？ (1.5) のような非可換化する話はあるのだろうか？ $\mathcal{A}(\mathbf{R}^3)$ 上の積分は、adele 上の積分に対応するのだろうか ([古])？

S^3	$\longleftrightarrow$	$\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$
$\cup$		$\cup$
結び目	$\longleftrightarrow$	素数
longitude		Frobenius
絡み数	$\longleftrightarrow$	Legendre 記号
$\mathrm{lk}(K,L) = \mathrm{lk}(L,K)$		$(\frac{p}{q}) = (\frac{q}{p})$ $(p,q \equiv 1 \bmod 4)$
3-dim. Poincaré 双対性		Artin − Verdier 双対性
Gauss 積分	$\longleftrightarrow$	Gauss の和
$\mathcal{A}(\mathbf{R}^3)$ 上の積分		adele 上の積分?
Vassiliev不変量···	$\longleftrightarrow$	?
非可換 Chern − Simons ゲージ理論		

以上は、絡み数の積分表示の方の一般化の話であったが、絡み数の代数的な高次化は昔からあった。それは Massey 積とか Milnor の$\overline{\mu}$-不変量とか呼ばれるものである。絡み目 L に対し、Milnor 不変量は絡み目群 $G_L = \pi_1(\mathbf{R}^3 \setminus L)$ から、その組合せ群論的な性質 (Wirtinger 表示) を用いて定義された。同様なことを素数たちに対して行うには、絡み目群の類似である Galois 群の組合せ群論的性格が G_Lのそれと類似している必要がある。次のセクションで見るように、この期待は満たされる。

2. 絡み目群と Galois 群

L を n 個の結び目 $K_1,\cdots,K_n$から成る絡み目とし、$G_L=\pi_1(S^3\setminus L)$ をその絡み目群とする。$G_L^{(q)}$ を G_Lの中心降下列の第 q-term とする。Milnor は冪零商 $G_L/G_L^{(q)}$ は次の群表示をもつことを示した ([Mi1,2]) : $F=\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$ を K_iの回りの meridian を表す word x_iたちで生成される自由群とする。この時、各 $q\geq 1$ に対し、$y_1^{(q)},\cdots y_n^{(q)}\in F$が存在し、$y_i^{(q)}\equiv y^{(q+1)}$ mod かつ、

$$(2.1)\qquad G_L/G_L^{(q)}=\langle x_1,\cdots,x_n\mid [x_i,y_i^{(q)}]=1(1\leq i\leq n),\ F^{(q)}=1\ \rangle$$

ここで、$y_i^{(q)}$は $G_L/G_L^{(q)}$で K_iの回りの longitude を表す $x_1,\cdots,x_n$の word である。 また、絡み目 L が純組み紐からできる時は、$y_i^{(q)}$は qによらず共通の y_iがとれ、上の群表示も G_L自身のものとなる。Milnor はこの群表示を用い、$y_j^{(q)}$を非可換冪級数環 $\mathbf{Z}[[X_1,\cdots,X_n]]_{nc}$ $(x_i=1+X_i)$ の中で Magnus 展開

$$y_j^{(q)}=1+\sum\mu(i_1\cdots i_rj)X_{i_1}\cdots X_{i_r}$$

し、Milnor 不変量 $\mu(i_1\cdots i_rj)$ $(r<q)$ を導入した。実際には、ある indeterminacy Δを考え、$\overline{\mu}(I)=\mu(I)$ mod Δが絡み目 L の isotopy 不変量になる。ここで、$\overline{\mu}(ij)=\mathrm{lk}(K_i,K_j)$ となるので、multi-index Iに対して $\overline{\mu}(I)$ は高次絡み数という意味をもつ。Massey 積との関係は、Stallings が予想し、Turaev と Porter が示した。

一方、素数の方では、セクション 1 で述べたように、初めに素数 lを与え、$p_i\equiv 1$ mod l となる相異なる n 個の素数の集合 $S=\{p_1,\cdots,p_n\}$ を考える。$G_S(l)=\pi_1(X\setminus S)^{(l)}$とする。これは $S\cup\{\infty\}$ の外で不分岐な $\mathbf{Q}$ 上の最大 l-拡大体 $\mathbf{Q}_S(l)$ の Galois 群である。p_i 上の $\mathbf{Q}_S(l)$ の素因子 $\wp_i$ を 1 つとり、G_i, I_i をその分解群、惰性群とすると、I_i は 1 元 τ_iで生成され、G_i は τ_i と Frobenius 置換のある延長 σ_i とで生成され、関係式 $\sigma_i\tau_i\sigma_i^{-1}=\tau^{p_i}$ を満たす (Hasse-岩澤)。 Galois 群 $G_S(l)$ は次の群表示を持つ (Koch) :

$$(2.2)\qquad G_S(l)=\langle x_1,\cdots,x_n\mid x_i^{p_i-1}[x_i,y_i]=1,\ 1\leq i\leq n\rangle$$

ここで、x_i は τ_i を表す word で、y_i は σ_i を表す。

この (2.2) を (2.1) の群論的類似とみること、つまり、τ_i(monodromy), σ_i(Frobenius) を各々 meridian, longitude の類似物と見ることが我々の基本的なアイディアである。

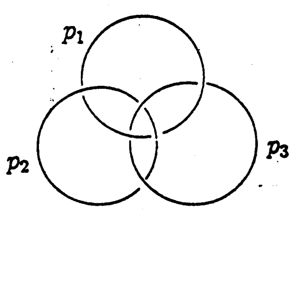
さらに、K_iの tubular 近傍 N_iと自然な準同型 $\pi_1(\partial N_i) \to G_L$を 局所体 $\mathbf{Q}_{p_i}$と自然な準同型 $\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbf{Q}_{p_i}))^{(l)} = G_i \to G_S(l)$ の類似と見るのである。

Milnor 不変量の類似物も次のように自然に定義される。すなわち、F を $x_1, \cdots, x_n$で生成される自由 pro-l 群とし、x_i を $1 + X_i$ へうつす Magnus 埋入 $F \to \mathbf{F}_l[[X_1, \cdots, X_n]]^{\times}_{nc}$ により, y_jを Magnus 展開したものを

$$y_j = 1 + \sum \mu_l(i_1 \cdots i_r j) X_{i_1} \cdots X_{i_r}$$

とした時、係数 $\mu_l(i_1 \cdots i_r j) \in \mathbf{F}_l$ を Milnor μ_l-不変量と呼ぶことにする。これは、$|I| < r$に対し、$\mu_l(I) = 0$ であれば、$\mu_l(Ij)$ が $G_S(l)$ の不変量になる。$\mu_l(ij)$ は２素数p_i, p_jの絡み数のはずだが、実際、$\zeta^{\mu_l(ij)}$(ζはある１の原始l乗根)は冪剰余記号$\left(\frac{p_i}{p_j}\right)_l^{-1}$と一致することが示せ (セクション１の群論的解釈)、従って一般の $\mu_l(I)$ は素数たちに対する triple 絡み数を意味する。その数論的意味は、Galois 群 $G_S(l)$ の Zassenhaus filtration $G_S(l)_q = G_S(l) \cap (1 + I^q_{\mathbf{F}_l[[G_S(l)]]})$ ($I_{\mathbf{F}_l[[G_S(l)]]}$は完備群環 $\mathbf{F}_l[[G_S(l)]]$ の augmentation ideal) に対応する $\mathbf{Q}_S(l)/\mathbf{Q}$ の elementary abelian l-拡大たちからなる塔 $\mathbf{Q}(q)$ $(q \geq 1)$ おいて、$\mu_l(i_1 \cdots i_r j)$ は p_jの分解の仕方を記述していることである。$\mu_2(ij) = 0$ は、$\left(\frac{p_j}{p_i}\right) = 1$、つまり ２次拡大 $\mathbf{Q}(\sqrt{p_j})/\mathbf{Q}$ において、p_iが２つの素イデアルに分解することと同値だが、その l-拡大塔への一般化である。例えば、昔、Rédei([Ré]) が Legendre 記号を一般化する triple 記号 $[p_1, p_2, p_3] \in \{\pm 1\}$ をある $\mathbf{Q}$ 上の８次２面体拡大に対して定義したが、我々の Milnor 不変量量と $(-1)^{\mu_2(123)} = [p_1, p_2, p_3]$ なる関係にあることが示せる。従って、Rédei 記号は高次絡み数して解釈されるのである。 さらに、絡み目側では、Milnor 不変量は絡み目群のある冪零モノドロミー表現に付随する冪零被覆の covering linkage invariant である、という村杉邦男氏の定理 ([Mu]) に対応し、Fox の自由微分法の pro-l版 (織田、伊原氏 [Ih3]) を用いて、Galois 群 $G_S(l)$ の mod lの Heisenberg 群への表現が定義できる。Rédei の２面体拡大はこの Heisenberg 拡大の特別な場合と見られる。 詳しくは、[Mo2],§3 参照。

例. $(p_1, p_2, p_3) = (5, 41, 61), (5, 29, 181)$. この時、$\mu_2(ij) = 0 (1 \leq i \leq 3)$、$\mu_2(123) = 1$。つまり、素数 p_1, p_2, p_3は mod 2 では、どの２つも絡まないが、３つを引き離すことができない Borromean 型の素数である。



上に述べた群論的構造の類似に基づき、素数たちに対しても Alexander 加群の理論を議論することができ、それは Galois 加群構造の理論 ([J],[N]) の Fox 微分法を用いた言い換えに他ならない。また、村杉氏の絡み目群の中心降下列についての予想 (小島、前田、Massey-Traldi、Labute の定理) の類似も成り立つものと思われる。詳しくは、[Mo2] 参照。

さて、絡み数は Gauss の積分表示をもったが、高次絡み数である Milnor 不変量は何らかの積分表示をもつだろうか? 自由群 $F =< x_1, \cdots, x_n >$ の $\mathbf{C}[[X_1, \cdots, X_n]]_{nc}^{\times}$への単射準同型で $x_i \mapsto 1 + X_i +$ (higher term) なるものは $\mathbf{C}[[X_1, \cdots, X_n]]_{nc}$の自己同型を除いて一意に決まる。その意味では、ひとつ 積分表示を係数にもつ Fの非可換冪級数展開を与えられるとよいが、例えば、$F = \pi_1(\mathbf{C} - \{1, \cdots, n\})$ と同一視し、$\mathbf{C} - \{1, \cdots, n\}$ 上の自明なベクトル束の上の平坦な formal connection $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{dz}{z-i}\right) X_i$ を考えれば、その monodromy 表現として、係数が Chen の反復積分で与えられる F の「展開」を得る ([Li]): $F \ni g = [c](c{=}\mathrm{loop})$ に対し、

$$I(g) = 1 + \sum_{1 \le i_1, \cdots, i_r \le n} \left((\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}})^r \int_{0 \le t_1 \le \cdots \le t_r \le 1} \bigwedge_{k=1}^{r} \frac{dc(t_k)}{c(t_k) - i_k} \right) X_{i_1} \cdots X_{i_r}$$

さらに、Milnor 不変量は string link の有限型不変量と見れ、それを Kontsevich 積分で明示する公式が、Habegger-Masbaum により得られている ([H-M])。数論側で、我々の Milnor 不変量を反復積分の類似 (反復 Gauss 和?) で表せるかどうかは興味深い。このあたりは伊原氏による Jacobi 和の普遍冪級数の理論 ([Ih2]) とどことなく関連を感じる。

絡み目 $L = K_1 \cup \cdots K_n$	$\longleftrightarrow$	素数たち $S = \{p_1, \cdots, p_n\}$, $p_i \equiv 1 \bmod l$
G_L meridian, longitude	$\longleftrightarrow$	$G_S(l)$ τ_i (monodromy), σ_i (frobenius)
Fox 自由微分法	$\longleftrightarrow$	pro $- \, l$ Fox 自由微分法 (Y.Ihara)
Milnor 不変量 $\bar{\mu}(123)$	$\longleftrightarrow$	Milnor 不変量 mod l Rédei triple 記号

Alexander ideal (reduced)Alexander 多項式 Alexander(絡み目) 加群 の Crowell 対応	$\longleftrightarrow$	pro(mod) $-\ l$ Alexander ideal 岩澤多項式 Galois(岩澤) 加群 の pro $-\ l$ Crowell 対応
Chen $-$ Kontsevich 積分 による絡み目不変量	$\longleftrightarrow$	multiple zeta, ploylog.?

3. Arithmetic topology

セクション１，２で、S^3の結び目と $\mathbf{Q}$ の素数の類似について述べたが、任意の３次元向き付け可能閉多様体 (以下、3-manifold) は S^3上ある絡み目で分岐する被覆多様体であり (Alexander, Hilden, Montesinos)、任意の代数体が $\mathbf{Q}$ 上ある素数たちで分岐する拡大体であることを考えれば、3-manifold と数体の間に概念的な類似があるだろうとは思われる。 私は、１，２で述べたようなこと、また、以下に述べるようなことに考えを巡らせてきたが、その途中、A. Reznikov と M. Kapranov が私とは独立に、3-manifold と数体の類似のアイディアを進め、arithmetic topology という理論 ([R1,2]) を創っていることを知った。Reznikov の問題意識は、数論的アイディアの 3-manifold topology への応用の方にあるようで、そのような結果である。以下私の問題意識と相通じる所を解説したい。

• Golod-Šafarevič 理論 (類体塔問題)([T],[R1]). 類体塔問題とは、l-類体塔の Galois 群 $\pi_1(\mathcal{O}_k)^{(l)}$が無限群になるような代数体 kがあるか？ という問題である。Golod-Šafarevič による解決の鍵は、組合せ群論的な定理にある：
「G を極小表示 $\langle x_1, \cdots, x_n \mid r_1 = \cdots = r_m = 1\rangle$ をもつ pro-l群とする時、$m < n^2/4$ なら、G は無限群になる」
(これは、Lyndon resolusion $\mathbf{F}_l[G]^m \to \mathbf{F}_l[G]^n \to I \to 0$, $I =$ augmentation ideal, を用いて、次数付き環 $\oplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}$ の Hilbert 関数を評価することにより得られる。可換環論における次元論などで使われるテクニックの非可換版類似である)。 従って、$n = \dim H^1(\pi_1(\mathcal{O}_k)^{(l)}, \mathbf{F}_l) = (k$のイデアル類群 H_k の l-rank) が十分大きくなれば$\pi_1^{pro-l}(\mathcal{O}_k)$ は無限になる、という方針でそのような kの存在例が示された。

一方、Mを 3-manifold とし、対応

$$\pi_1(M) \longleftrightarrow \pi_1(\mathcal{O}_k)$$

$$H_1(M,\mathbf{Z}) \longleftrightarrow H_k$$

のもとに、3-manifold group に対する類体塔問題の類似として、Reznikov は次を示した。
「ある素数 l に対し、$\dim H_1(M,\mathbf{F}_l) \geq 4$ とし、virtually b_1-positive でないとする。この時、Mは無限に続く l-cover をもつ」
Reznikov はさらに、Mの第 i 類体塔 M_iの $\dim H_1(M_i,\mathbf{F}_l)$ は指数オーダーで増加してゆくことも示した。すなわち、Golod-Šafarevič の不等式を満たす 3-manifold group の pro-l完備化は、l-進 Lie 群にはならないのである。例えば、$PSL_2(\mathbf{C})$ の任意の数論的格子は合同部分群性質をもたず、従って、その pro-l完備化は l-進 Lie 群にはならない ([Lu])。

一方、$\pi_1(\mathcal{O}_k)^{(l)}$の方はどうだろうか？ このような Galois 群こそ、古典的な対象にもかかわらず、関数体と代数体の類似という視点ではとりつけない対象の一つである。その構造については、「それが無限群なら、l-進 Lie 群ではないだろう」という Fontaine と Mazur の予想がある。すなわち、こういった分岐条件をもつ数体の Galois 群は、むしろ 3-manifold group と類似した群論的性格をもつと思われる。

• 種の理論 ([Mo3],[R2],[Sa]). セクション１に述べたように、Gauss による２次形式の種の定義は絡み数の考え方の類似である。２次体 kの言葉でいえば、イデアル類群 H_kに Legendre 指標を用いて「種」という同値関係がはいる。その種の数を $k/\mathbf{Q}$ で分岐する素数の個数で表すのが Gauss の理論である。その 3-manifold topology における類似が次のように考えられる。
$M \xrightarrow{\pi} S^3$ を t 個の結び目 $K_1,\cdots,K_t$上分岐する m 次巡回被覆とし、その Galois 群Γの生成元をσとする。
$H_1(M) = H_1(M,\mathbf{Z}) \ni \alpha,\beta$ が同じ「種」ということを、

$$\alpha \approx \beta \Leftrightarrow \mathrm{lk}(\pi_*(\alpha),K_i) \equiv \mathrm{lk}(\pi_*(\beta),K_i) \mod m_i, \quad 1 \leq i \leq t$$

により定義する (well-defined)。このとき、次が成り立つ：
K_iの meridian の Γにおける位数を $m_i(\neq 1)$ とすると、

$$\alpha \approx \beta \Longleftrightarrow \alpha - \beta \in H_1(M)^{\sigma-1} = H_1(M)^{\Gamma},$$

$$\begin{array}{ccc} H_1(M)/\approx & \xrightarrow{\sim} & \{(\xi_i) \in \prod_{i=1}^t \mathrm{Z}/m_i\mathrm{Z} \mid \sum_{i=1}^t \xi_i = 0\} \quad (\mathrm{Z}/m_i\mathrm{Z} \subset \mathrm{Z}/m\mathrm{Z}) \\ \Cup & & \Cup \\ [\alpha] & \mapsto & (\mathrm{lk}(\pi_*(\alpha), K_i) \bmod m_i) \end{array}$$

これは有理数体上の巡回拡大に対する弥永-玉河による種の理論 ([I-T]) の類似である。特に $m=2$ の時は、$H_1(M)^\Gamma = 2H_1(M)$、従って、$H_1(M)$ の 2-rank が丁度 $t-1$ であることが示せ、Gauss の種の理論 ([G1]) の主定理の類似を得る。また、作間 ([Sa]) では、アーベル拡大における種の数に関する Leopoldt の公式 ([Le]) の類似が与えられている。

• 単項化問題. イデアル類群を 1 次元ホモロジー群の類似物とみる視点から、数体 kの元 a に単項イデアル (a) を対応させることと、3-manifold$M$内の曲面 Sにその境界∂Sを対応させることを類似と見る。これにより、kの単数には閉非圧縮曲面が対応し、単数群 $\mathcal{O}_k^\times$ には $H_2(M,\mathrm{Z})$ が対応する ([R2])。

$$\begin{array}{ccc} \text{閉非圧縮曲面} & \longleftrightarrow & \text{単数} \\ H_2(M,\mathrm{Z}) & & \mathcal{O}_k^\times \end{array}$$

不分岐 Galois 拡大 K/kが与えられた時、Kで単項化する kのイデアル類の数 $|\mathrm{Ker}(H_k \to H_K)|$ は Kの単数群の Galois cohomology の位数 $|H^1(\mathrm{Gal}(K/k), \mathcal{O}_K^\times)|$ と等しい。一方、$N \to M$ を 3-manifolds の不分岐 Galois 被覆とし、$t: H_1(M) \to H_1(N)$ を transfer とする時、$|\mathrm{Ker}(H_1(M) \xrightarrow{t} H_1(N))|$ を $H_2(N)$ の Galois cohomology で表せるだろうか？ さらに、K/kが巡回拡大なら、$|H^1(\mathrm{Gal}(K/k), \mathcal{O}_K^\times)|$ は $[K:k](\mathcal{O}_k^\times : N_{K/k}(\mathcal{O}_K^\times))$ に等しく (Herbrand, Artin, Chevalley, Tate)、Hilbert の定理９４「不分岐巡回拡大 K/kでは、少なくとも $[K:k]$ 個の kのイデアル類が Kで単項化する」が従う。これの 3-manifold 類似は何だろうか？
この問いについて、古田幹雄氏に次の方針をご教示頂いた ([古])： Poincaré 双対性より $\mathrm{Ker}(H_1(M) \xrightarrow{t} H_1(N))$ は $\mathrm{Ker}(H^2(M) \to H^2(N))$ と同型で、後者は群の拡大 $1 \to \pi_1(N) \to \pi_1(M) \to \mathrm{Gal}(N/M) =: G \to 1$ に付随する Hochschild-Serre spectral sequence を用いれば、Mが $K(\pi,1)$ の時は計算される。 実際、spectral sequence の計算を実行してみると次の完全列を得る。

$$0 \to \mathrm{Cok}(d_2^{0,1}) \to \mathrm{Ker}((H_1(M) \xrightarrow{t} H_1(N)) \to \mathrm{Ker}(d_2^{1,1}) \to 0,$$

$$d_2^{0,1} : H^1(G, H^1(N)) \to H^2(G,\mathrm{Z}), \quad d_2^{1,1} : H^1(G, H^1(N)) \to H^3(G,\mathrm{Z}).$$

N/Mが巡回被覆の時は、$\mathrm{Im} d_2^{0,1} = \mathrm{Ker}(inf : H^2(G,\mathrm{Z}) \to H^2(M)) = 0$, $H^3(G,\mathrm{Z}) = 0$ なので、$|\mathrm{Ker}((H_1(M) \xrightarrow{t} H_1(N))| = [N:M]|H^1(G, H_2(N))|$

となり、3-manifold に対しても Hilbert の定理９４は成り立つ。

最後に、このトピックに関連する論文としてB. Mazur の [Ma3] がある。Mazur からの私信 ([Ma2]) によると、Mazur は３５年前、素数と結び目の類似 (絡み数の歪対称性としての平方剰余の相互律、Alexander 多項式の類似としての岩澤多項式、結び目群に関するある topic) について mimeographed note(未発表) を書いたそうである (これは、私の論文を松本幸夫先生へお送りした所、松本先生より Mazur の mimeo. note のことをご教示頂き、Mazur に問い合わせた所、Mazur から頂いたご返事による)。 Mazur の note の内容は見ていないのでよくわからないが、[Ma3] が Mazur のこの主題に関して発表した論文とのこと。そこでは、結び目群$\pi_1(S^3 \setminus K)$ の表現たちの複素解析的 variation と Galois 群$\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathrm{Z}) \setminus \{p\})$ の p-進表現たち (p-motives) の p-進解析的 variation の類似が論じられている。Mazur, Reznikov, Kapranov と私の研究は、独立になされたものであり、動機、方法 (見方)、結果など異なるようである。素数を結び目と見るというアイディアは共通である。

上にも述べたが、こういった考え方の源流は Gauss の思想の中に既にあるようにも思われる。Gauss に端を発する数論、(位相) 幾何学、超幾何関数、数理物理などの類似、絡み合いに、「結び目と素数」という視点から新たな光があてられればどんなにか素晴らしいことだろう。

御礼: 貴重な刺激、コメント、助言、励ましを下さった、伊原康隆、太田啓史、大槻知忠、小野孝、小野薫、加藤和也、金子昌信、亀谷幸生、M.Kapranov、久保田富雄、河野俊丈、後藤竜司、小林亮一、M.Kontsevich、今野宏、野村明人、橋本義武、J.Hillman、深谷賢治、福本善洋、古田幹雄、古田孝臣、松本幸夫、 村杉邦男、 B.Mazur、望月拓郎、J.Morava、森田茂之、A.Reznikov の諸氏 (敬称略) に感謝申し上げます。

参考文献

[深 1] 深谷賢治, 電磁場とベクトル解析, 岩波.
[深 2]—, ゲージ理論と幾何学 (チャーン・サイモンズ場), 数理科学 1996 年 3 月号.
[古] 古田幹雄, Casson 不変量についてのノート, 2000 年, 8 月.
[G-S]E. Golod, I. Šafarevič, On the class field tower. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **28** (1964) 261–272.
[G1]C.F. Gauss, Disquisitiones arithmeticae, Yale Univ., (1966).
[G2]——,Zur mathematischen Theorie der electrodynamischen Wirkungen, Werke V, (1833), 特に p 605.
[H-M]N. Habegger, G. Masbaum, The Kontsevich integral and Milnor's invariants, Topology. **39**, (2000), 1253-1289.
[Ih1]Y. Ihara, How many primes decompose completely in an infinite unramified Galois extension of a global field? J. Math. Soc. Japan **35** (1983), no. 4, 693–709.
[Ih2]——, Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplications, Ann. of Math., **123** (1986), 43-106.

[Ih3]——, On Galois representations arising from towers of coverings of $\mathbf{P}^1\backslash\{0,1,\infty\}$, Invent. math. **86** (1986), 427-459.
[I-T]S. Iyanaga, T. Tamagawa, Sur la theorie du corps de classes sur le corps des nombres rationnels. J. Math. Soc. Japan **3**, (1951). 220–227.
[J]U. Jannsen, Iwasawa modules up to isomorphism, Algebraic number theory, Adv. Stud. Pure Math., **17**, Academic Press, Boston, MA (1989), 171-207.
[河] 河野俊丈, 場の理論とトポロジー, 岩波.
[Le]H. Leopoldt, Zur Geschlechtertheorie in abelschen Zahlkörpern, Math. Nachr., **9**, (1953), 351-362.
[Li]X.-S. Lin, Power series expansions and invariants of links, AMS/IP Studies in Advanced Math. **2**, Part 1, (1997), 184-202.
[Lu]A. Lubotzky, Group presentation, p-adic analytic groups and lattices in $SL_2(\mathbf{C})$, Ann. of Math. **118**, (1983), 115-130.
[Ma1]B. Mazur, Notes on étale cohomology of number fields. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **6** (1973), 521-552.
[Ma2]———, Personal e-mail to the author, October 17, 2000.
[Ma3]———, The theme of p-adic variation, Mathematics: frontiers and perspectives, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2000), 433–459.
[Mi1]J. Milnor, Link groups, Ann. of Math. **59**, (1954), 177-195.
[Mi2]———, Isotopy of links, in Algebraic Geometry and Topology, A symposium in honour of S. Lefshetz (edited by R.H. Fox, D.S. Spencer and W. Tucker), Princeton Univ. Press, Princeton, (1957), 280-306.
[Mo1]M. Morishita, Milnor's link invariants attached to certain Galois groups over $\mathbf{Q}$, Proc. Japan Academy, **76**, No.2, 18-21,(2000).
[Mo2]———, On certain analogies between knots and primes, (2000), preprint.
[Mo3]———, In prepararion, (2001).
[Mu]K. Murasugi, Nilpotent coverings of links and Milnor's invariant, Low-dimensional topology, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **95**, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York (1985), 106-142.
[N]T. Nguyen-Quang-Do, Formations de classes et modules d'Iwasawa, Number theory Noordwijkerhout 1983, Lecture Note in Math. **1068**, Springer (1984), 167-185.
[Ré]L. Rédei, Ein neues zahlentheoretisches Symbol mit Anwendungen auf die Theorie der quadratischen Zahlkörper, I, J. reine angew. Math. **180** (1938), 1-43.
[R1]A. Reznikov, Three-manifolds class field theory (Homology of coverings for a nonvirtually b_1-positive manifold), Sel. math. New ser. **3**, (1997), 361-399.
[R2]——-, Embedded incompressible surfaces and homology of ramified coverings of three-manifolds, Sel. math. New ser. **6** (2000), to appear.
[Sa]M. Sakuma, On regular coverings of links, Math. Ann., **260**, (1982), 303-315.
[Sc]A. Schmidt, An arithmetic site for the rings of integers of algebraic number fields. Invent. Math. **123** (1996), no. 3, 575–610.
[T]V.G. Turaev, Nilpotent homotopy types of closed manifolds, SLN, **1060**, (1984).
[W]J.-L. Waldspurger, Entrelacements sur Spec($\mathbf{Z}$), Bull. Sc. math. **100** (1976), 113-139.

E-mail: morisita@kappa.s.kanazawa-u.ac.jp